



RR-0882

Third Year B. Sc. Examination
March / April – 2010
Number Theory
(Old Course)

Time : Hours]

[Total Marks :

સૂચના :

(૧)

નીચે દર્શાવેલ નિશાનીવાળી વિગતો ઉત્તરવહી પર અવશ્ય લખવી.
Fillup strictly the details of signs on your answer book.

Name of the Examination :
T. Y. B. Sc.

Name of the Subject :
Number Theory

Subject Code No. : 0 8 8 2 Section No. (1, 2,.....): Nil

Seat No. :

Student's Signature

(૨) જમણી તરફની સંખ્યા પૂરા ગુણ દર્શાવે છે.

(૩) પ્રચલિત સંકેતોને અનુસરો.

૧ નીચેનાના જવાબ આપો :

૧૦

(૧) સાબિત કરો કે $2^{5n} - 1$ એ 31 વડે વિભાજ્ય છે.

(૨) આપેલા ઘનપૂર્ણાંક K માટે સાબિત કરો કે K ક્રમિક વિભાજ્ય સંખ્યા અસ્તિત્વ ધરાવે છે.

(૩) આપેલ રેખ્યુનીટ $R_n = \frac{111\dots 1}{n \text{ વખત}}$ તો સાબિત કરો કે $11/R_n \Leftrightarrow 11/n$.

(૪) $1000!$ ને ભાગી શકે તેવો 5નો મહત્તમ ઘાતાંક શોધો.

(૫) સાબિત કરો કે $\phi(3n) = 3\phi(n) = > 3/n$.

૨ (અ) કોઈ પણ પૂર્ણાંક $k \neq 0$, સાબિત કરો કે $\gcd(ka, kb) = |k| \gcd(a, b)$. ૫

(બ) બે ક્રમિક ઘનોનો તફાવત ક્યારેય પણ 2 વડે વિભાજ્ય નથી તે બતાવો. ૪

(ક) જો a/c અને b/c તથા $\gcd(a, b) = 1$ તો સાબિત કરો કે ab/c . ૩

અથવા

- ૨ (અ) ધનપૂર્ણાંક a અને b માટે સાબિત કરો કે $\gcd(a, b) \cdot \text{lcm}(a, b) = ab$. ૫
- (બ) ડાયોફેન્ટાઈન સમીકરણ $18x + 5y = 48$ નાં બધા જ ધન ઉકેલો મેળવો. ૪
- (ક) “કોઈ પણ અયુગ્મ પૂર્ણાંક સંખ્યાનો વર્ગ $8k + 1$ સ્વરૂપનો છે.” એમ સાબિત કરો. ૩
- ૩ (અ) અંકગણિતનો મૂળભૂત પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. ૫
- (બ) કોઈ પણ પૂર્ણાંક a અને b માટે, સાબિત કરો કે $a \equiv b \pmod{n} \Leftrightarrow a$ અને b ને n વડે ભાગવાથી સમાન અનુશ શેષ મળે છે. ૪
- (ક) સાબિત કરો કે $4n + 1$ પ્રકારના બે પૂર્ણાંકોનો ગુણાકાર પણ $4n + 1$ પ્રકારનો મળે છે. ૩

અથવા

- ૩ (અ) જો P_n એ n મી અવિભાજ્ય સંખ્યા હોય તો સાબિત કરો કે $P_n \leq 2^{2^{n-1}}$. ૫
- (બ) સાબિત કરો કે કોઈ પણ અવિભાજ્ય સંખ્યા P માટે \sqrt{P} અસંમેય સંખ્યા છે. ૪
- (ક) સાબિત કરો કે દરેક ધનપૂર્ણાંક n માટે, $n = 2^r m$ પ્રકારની એક જ અભિવ્યક્તિ હોય છે. જ્યાં $r \geq 0$, અને m એ અયુગ્મ પૂર્ણાંક છે. ૩
- ૪ (અ) ફરમાનું પ્રમેય લખો અને સાબિત કરો. ૫
- (બ) સુરેખ સમશેષ ઉકેલો : $36x \equiv 8 \pmod{102}$. ૪
- (ક) જો $P(x) = \sum_{k=1}^n C_k x^k$ એ પૂર્ણાંક સહગુણકો સાથેનું x નું બહુપદી ૩
- વિધેય છે. જો $a \equiv b \pmod{n}$ તો સાબિત કરો કે $P(a) \equiv P(b) \pmod{n}$.

અથવા

- ૪ (અ) સાબિત કરો કે વર્ગાત્મક સમશેષ $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, જ્યાં P અયુગ્મ અવિભાજ્ય સંખ્યા છે, નો ઉકેલ છે તો અને તો જ $P \equiv 1 \pmod{4}$. ૫

(બ) જો ધનપૂર્ણાંક N નું દશાંકી નિરૂપણ, ૪

$$N = a_m 10^m + a_{m-1} \cdot 10^{m-1} + \dots + a_1 10 + a_0, 0 \leq a_k < 10 \text{ અને}$$

$$S = a_0 + a_1 + \dots + a_m \text{ હોય તો સાબિત કરો કે } 9/N \Leftrightarrow 9/S.$$

(ક) જો p અને q જુદી જુદી અવિભાજ્ય સંખ્યા માટે $a^p \equiv a \pmod{q}$ અને

$$a^q \equiv a \pmod{p} \text{ તો સાબિત કરો કે } a^{pq} \equiv a \pmod{pq}.$$

૫ (અ) મોબીઈઝનાં વ્યસ્ત સૂત્રો લખો અને સાબિત કરો. ૫

(બ) સાબિત કરો કે વિધેયો τ અને σ બંને ગુણનાત્મક વિધેયો છે. ૪

(ક) વાસ્તવિક સંખ્યા x માટે, $[x] + [-x]$ શોધો. ૩

અથવા

૫ (અ) ધનપૂર્ણાંક r માટે, સાબિત કરો કે કોઈ પણ r ક્રમિક ધનપૂર્ણાંક ૪
સંખ્યાનો ગુણાકાર $r!$ વડે વિભાજ્ય છે.

(બ) જો $\gcd(m, n) = 1$ તો સાબિત કરો કે mn ના ધન ભાજકોનો ૪
ગણ $d_1 d_2$ ના ગુણકનો બનેલો છે. જ્યાં $d_1/n, d_2/m$
અને $\gcd(d_1, d_2) = 1$.

(ક) જો $n > 1$ માટે, $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}$ અવિભાજ્ય અવયવીકરણ હોય ૩
તો સાબિત કરો કે $\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_r + 1)$.

૬ (અ) જો અવિભાજ્ય સંખ્યા p માટે $p \nmid a$ તો સાબિત કરો કે ૫

$$a^{\phi(p^k)} \equiv 1 \pmod{p^k}, \text{ જ્યાં } k > 0 \text{ પૂર્ણાંક છે.}$$

(બ) જો P અવિભાજ્ય સંખ્યા અને $k > 0$ છે તો સાબિત કરો કે ૪

$$\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}.$$

(ક) 3^{256} ના દશાંકી નિરૂપણના છેલ્લા બે અંકો મેળવો. ૩

અથવા

- ૬ (અ) $n > 1$ અને $\gcd(a, n) = 1$ માટે, જો $a_1, a_2, \dots, a_{\phi(n)}$ એ n કરતાં ϕ નાના ધનપૂર્ણાંક અને n સાથે સાપેક્ષ અવિભાજ્ય છે તો સાબિત કરો કે $aa_1, aa_2, \dots, aa_{\phi(n)}$ એ કોઈ ક્રમમાં $a_1, a_2, \dots, a_{\phi(n)}$ સાથે મોડ્યુલો n સમશેષ છે.
- (બ) આપેલ અયુગ્મ પૂર્ણાંક n , જે 5નો ગુણક નથી, માટે સાબિત કરો કે જેના બધા અંકો 1 છે તેવી પૂર્ણાંક સંખ્યા n વડે વિભાજ્ય છે.
- (ક) કોઈ પણ પૂર્ણાંક a માટે સાબિત કરો કે $a^{37} \equiv a \pmod{1729}$.

ENGLISH VERSION

- Instructions :** (1) As per the instruction no. 1 of page no. 1.
 (2) Figures to the **right** indicate full marks.
 (3) Follow usual notations.

- 1 Answer the following : 10
- (1) Show that $2^{5^n} - 1$ is divisible by 31.
- (2) Given any positive integer k , show that there exist k consecutive composite integers.
- (3) Given a repunit R_n , show that $11/R_n$ if and only if $11/n$.
- (4) Find the highest power of 5 dividing $1000!$.
- (5) Prove that $\phi(3n) = 3\phi(n) > 3/n$.
- 2 (a) For any integers $k \neq 0$, show that 5
 $\gcd(ka, kb) = |k| \gcd(a, b)$.
- (b) Establish that the difference of two consecutive 4
 cubes is never divisible by 2.
- (c) If a/c and b/c , with $\gcd(a, b) = 1$, then show that ab/c . 3

OR

- 2 (a) For positive integers a and b prove that 5
 $\gcd(a, b) \cdot \text{lcm}(a, b) = ab$.
- (b) Determine all solutions in positive integers of the 4
 Diophantine equation : $18x + 5y = 48$.
- (c) Prove that the square of any odd integer is of the 3
 form $8k + 1$.
- 3 (a) State and prove fundamental theorem of arithmetic. 5
- (b) For arbitrary integers a and b, show that $a \equiv b \pmod{n}$ 4
 if and only if a and b leave the same nonnegative
 remainder when divided by n.
- (c) Show that the product of two integers of the form 3
 $4n + 1$ is of the same form.

OR

- 3 (a) If P_n is the n^{th} prime number, then show that $P_n \leq 2^{2^{n-1}}$. 5
- (b) Prove that \sqrt{P} is irrational for any prime p . 4
- (c) Show that every positive integer n has a unique 3
 expression of the form $n = 2^r m$, $r \geq 0$, m a positive odd
 integer.
- 4 (a) State and prove Fermat's Little theorem. 5
- (b) Solve the linear congruence : $36x \equiv 8 \pmod{102}$. 4
- (c) Let $P(x) = \sum_{k=1}^n C_k x^k$ be a polynomial function of x with 3
 integral coefficients c_k . If $a \equiv b \pmod{n}$, then show that :
 $P(a) \equiv P(b) \pmod{n}$.

OR

- 4 (a) Prove that the quadratic congruence $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}$, where p is an odd prime, has a solution if and only if $P \equiv 1 \pmod{4}$. 5
- (b) If $N = a_m 10^m + a_{m-1} 10^{m-1} + \dots + a_1 10 + a_0$ be the decimal expansion of the positive integer N , $0 \leq a_k < 10$ and let $S = a_0 + a_1 + \dots + a_m$. Then prove that $9|N$ if and only if $9|S$. 4
- (c) If p and q are distinct primes such that $a^p \equiv a \pmod{q}$ and $a^q \equiv a \pmod{p}$, then prove that $a^{pq} \equiv a \pmod{pq}$. 3

- 5 (a) State and prove Mobius inversion formula. 5
- (b) Show that the function τ and σ are both multiplicative functions. 4
- (c) For real number x , find $[x] + [-x]$. 3

OR

- 5 (a) For a positive integer r , prove that the product of any r consecutive positive integers is divisible by $r!$. 5
- (b) If $\gcd(m, n) = 1$, then show that the set of positive divisors of mn consists of all products $d_1 d_2$ where $d_1 | n$, $d_2 | m$ and $\gcd(d_1, d_2) = 1$. 4
- (c) If $n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}$ is the prime factorization of $n > 1$, then prove that $\tau(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) \dots (k_r + 1)$. 3
- 6 (a) If p is a prime which does not divide a , then show that $a^{\phi(p^k)} \equiv 1 \pmod{p^k}$, $k > 0$ is any integer. 5
- (b) If p is a prime and $k > 0$, then prove that $\phi(p^k) = p^k - p^{k-1}$. 4

- (c) Find the last two digits in the decimal representation of 3^{256} . **3**

OR

- 6** (a) Let $n > 1$ and $\gcd(a, n) = 1$. If $a_1, a_2, \dots, a_{\phi(n)}$ are the positive integers less than n and relatively prime to n , then prove that $aa_1, aa_2, \dots, aa_{\phi(n)}$ are congruent modulo n to $a_1, a_2, \dots, a_{\phi(n)}$ in some order. **5**
- (b) Let n be an odd integer which is not a multiple of 5, then show that n divides an integer all of whose digits are equal to 1. **4**
- (c) For any integer a , show that $a^{37} \equiv a \pmod{1729}$. **3**
-